Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Übersicht Integralsätze
- Prüfungsaufgaben

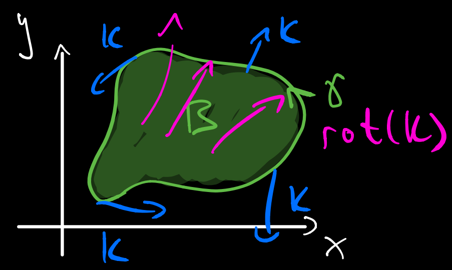
Repetition Integralsätze:

Green: $K = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix}$

Beispiele:

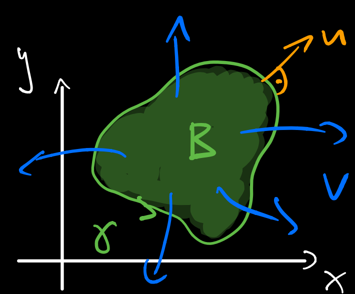
$$\int_{\partial B} (P\,dx + Q\,dy) = \int_B (Q_x - P_y)\,dS$$

$$\int_{\partial B} K\,ds = \int_B \mathrm{rot}(K)\cdot n \cdot dS$$



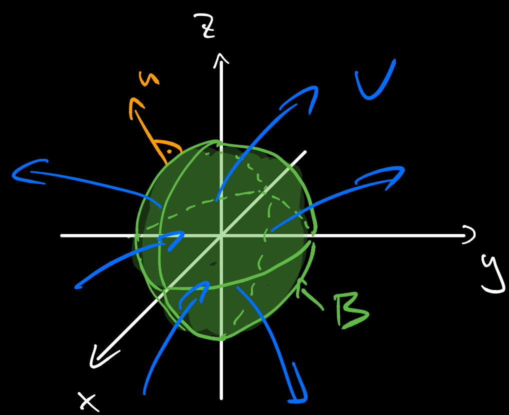
2D Gauss:

$$\int_{\partial B} v \cdot n\,ds = \int_B \mathrm{div}(v)\,dS$$



3D Gauss:

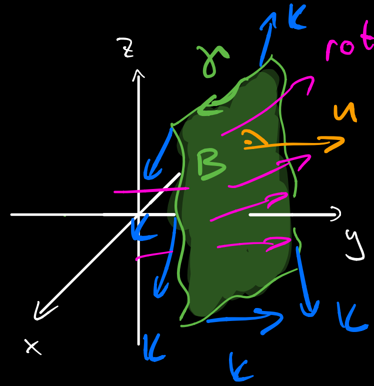
$$\int_{\partial B} v \cdot n\,dS = \int_B \mathrm{div}(v)\,d\mu$$

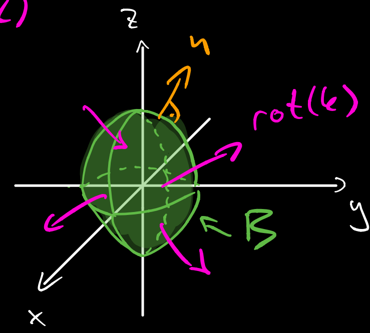


↳ B das Kugelvolumen

Stokes:

$$\int_{\partial B} K \, ds = \int_{B} \operatorname{rot}(K) \cdot n \cdot dS$$





↳ B die Kugeloberfl.

$\partial(\partial V) = 0$

Übersicht:

$\mathbb{R}^2$:

Green:

Kurvenintegrale, insb. geschlossene Kurven um eine Menge B

2D Gauss:

Flussintegrale, insb. über geschlossene Kurven um Menge B

↓

$\mathbb{R}^3$:

Stokes:

Kurvenintegral über den Rand von offenen Flächen -> können aber auch geschlossen sein?

3D Gauss:

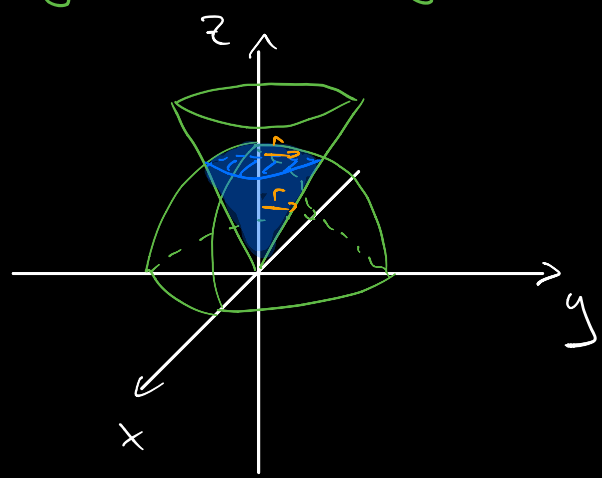
Flussintegrale aus geschlossenen Flächen heraus -> man kann offene Flächen aber auch manuell schliessen?

Beispiele:

i) Bestimmen sie mittels Parametrisierung das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 3z^2\}$ und die Sphäre

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ beschränkt wird und oberhalb der xy-Ebene liegt:



Vorgehen:

Ganz normales Volumenintegral $\Rightarrow$ über 1 integrieren.

Volumen ist Achsensymmetrisch zur z-Achse

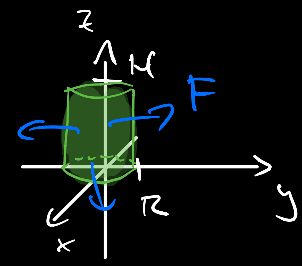
$\Rightarrow$ Zylinderkoordinaten verwenden!

Für den Radius muss noch der Schnittpunkt zwischen Kegel & Kugel gefunden werden!

$$x^2+y^2 = 3z^2 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 3z^2 = 1 - z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \underline{\pm \tfrac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad z = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$

ii) Berechnen sie den Fluss des Vektorfeldes



$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy^2 - z^2 \\ yz^2 - x^2 \\ zx^2 - y^2 \end{bmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H\}$$

<u>Vorgehen:</u>

Satz von Gauss? $\rightarrow$ $\operatorname{div}(F) = x^2+y^2+z^2$ $\Rightarrow$ schön!

↳ Gauss scheint der richtige Ansatz zu sein

$$\Rightarrow \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2+z^2)\, r \, dr\, d\varphi\, dz \neq 0$$

Stokes: $\rightarrow$ Der falsche Weg

$$\int_B \underline{\operatorname{rot}(K)}\, n \, dS = \int_{\partial B} K \, ds = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(K) = F = \begin{bmatrix} xy^2 - z^2 \\ yz^2 - x^2 \\ zx^2 - y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}$$

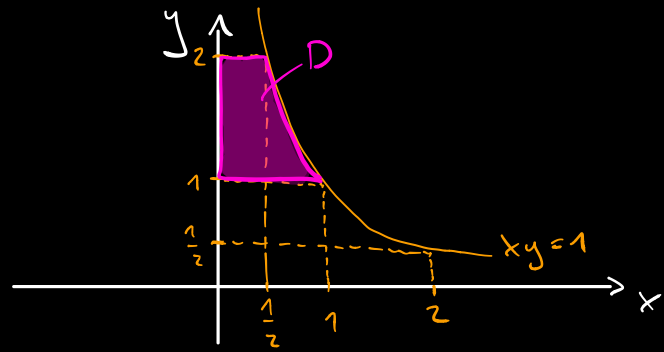
$\Rightarrow$ F kann kein Potential haben, wäre ein Widerspruch zu oben.

Restliche Probeprüfung Willwacher:

6) Bestimmen sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xye^{-xy}$$

im Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, |xy| \leq 1\}$.



Vorgehen:

Bei Extremalwertaufgaben muss das Innere & das Äussere immer separat betrachtet werden!

Innere $\mathring{D}$: $\nabla f \overset{!}{=} 0$

↳ überprüfen ob die Kandidaten tatsächlich in $\mathring{D}$ liegen

Rand ∂D:

Lagrange Multiplikatoren sind hier unnötig:

→ Randbedingungen in $\nabla f = 0$ einsetzen und kritischen Punkte auf Rand finden.

γ_1: $x = 0$

γ_2: $y = 1$

γ_3: $y = 2$

in ∇f nacheinander einsetzen & Kandidaten finden oder direkt in f einsetzen

γ_4: $\quad x = \frac{1}{y} \quad \Big\}$ & Funktion abschätzen

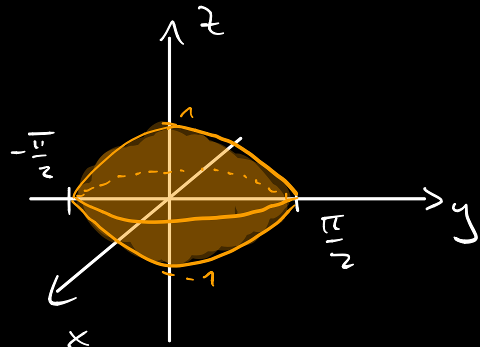
$\rightsquigarrow$ Die Eckpunkte nicht vergessen!

$(0,1), (0,2), (\frac{1}{2}, 2), (1,1)$

$\Rightarrow$ Alle Kandidaten in f einsetzen & Maximum bestimmen.

8) Berechne das Volumen des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq \cos^2(y), -\tfrac{\pi}{2} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

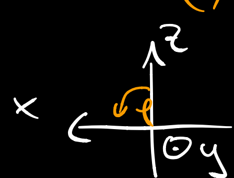


Vorgehen:

Volumen ist Achsensymmetrisch zur y-Achse, normalerweise haben wir z-Achse gesehen

$\hookrightarrow$ Zylinderkoordinaten bzgl. y-Achse!

$$r(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \longleftrightarrow r(r,\varphi,y) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ -r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

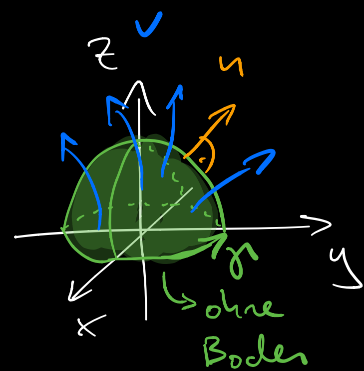


$$\Rightarrow \quad V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\cos(y)} r \, dr \, d\varphi \, dy$$

Aufgabe 12)

Sei $v = \begin{bmatrix} xz^2 \\ x^2y - z^3 \\ 2xy + y^2 z \end{bmatrix}$ und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = z, \, z \geq 0\}$

$$\int_S v \cdot n \cdot dS$$



Vorgehen:

Was ist S? $\rightarrow$ Zeichnung:

Gauss? Stokes? Direkt?

Stokes:

$$\int_S \mathrm{rot}(k) \cdot n \cdot dS = \int_{\partial S} k \, ds$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}(k) = v$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz^2 \\ x^2y - z^3 \\ 2xy + y^2 z \end{bmatrix}$$

Gauss: $B = S \cup G$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, x^2+y^2 \le 1\}$

$$\int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu = \int_S v \cdot n \cdot dS + \int_G v \cdot n \cdot dS$$

$$\Rightarrow \int_S v \cdot n\, dS = \int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu - \int_G v \cdot n \cdot dS$$

$\operatorname{div}(v) = x^2+y^2+z^2$ → schön, machen wir

$$\int_B \operatorname{div}(v)\, d\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta}_{\substack{\text{Volumenelement} \\ \text{Kugelkoordinaten}}}\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \underline{\frac{2\pi}{5}}$$

$$\int_G v \cdot n \cdot dS = \int_{x^2+y^2 \le 1} \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 y \\ 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} dS$$

$$= \int_{x^2+y^2 \le 1} -2xy\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -2r^2 \underbrace{\cos\varphi \sin\varphi}_{0} \cdot r\, d\varphi\, dr$$

$$= \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_S v \cdot n \cdot dS = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5}}}$$